# **Зірки та графи**

## Ключові поняття теорії графів.

* **3-регулярний граф:** кожна вершина має ступінь 3 (з’єднана з трьома сусідами).
* **Планарний граф:** граф можна відобразити на площині так, щоб ребра не перетиналися.
* **Міст (bridge):** ребро, видалення якого розділяє граф на дві компоненти.
* **Розфарбовування ребер:** розподіл кольорів на ребрах так, щоб суміжні ребра мали різні кольори.
* **Граф-снарок (snark):** кубічний граф без можливого 3-розфарбовування ребер, з певними складними властивостями.
* **Непланарний граф:** граф, який не може бути відображений у площині без перетинів ребер.
* **Граф** **зірка (star graph)** це спеціальний тип графа, який є повним двочастковим графом, що складається з одного центрального вузла (вершини), з'єднаного ребром з іншими вузлами (листками), які не мають між собою ребер

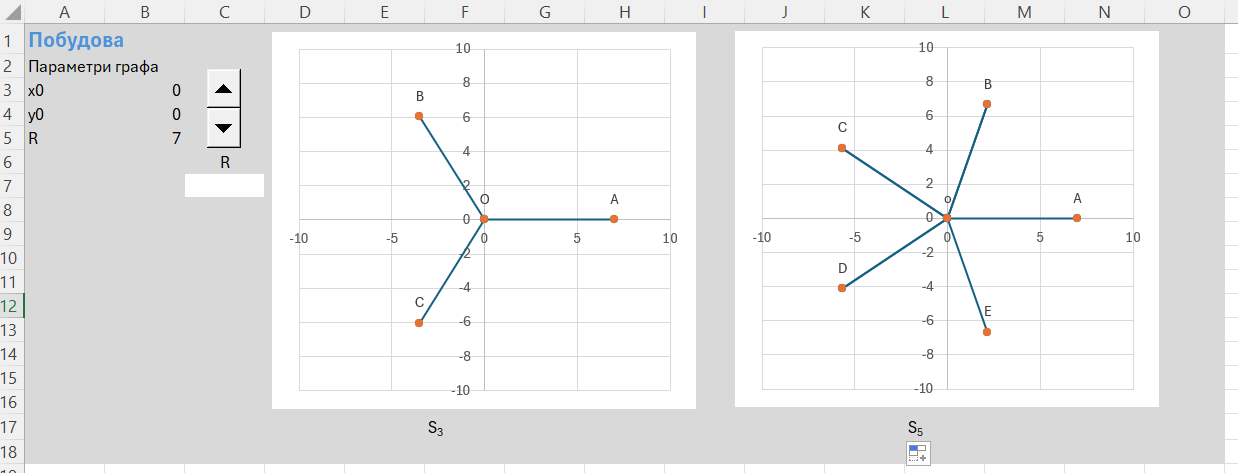
# Інструкція

## **Завдання виконується в файлі «star.xlsx».**

### Аркуш «Зірка»

Створити зображення двох зірок S3 і S5 (Рис.1). Довжина ребра R визначається значенням лічильника від 4 до 10. Вісі фіксовані.

Рис.1



На аркуші містяться формули для побудови діаграм. Зовнішній вигляд діаграм , їх розташування,інформація про початкові значення параметрів, лічильника повинні відповідати зразку.

### Аркуш «Петерсон»

Граф Петерсона тісно пов'язаний із "зіркою" в теорії графів, оскільки його можна побудувати як *узагальнений граф Петерсона* — з'єднавши вершини правильного багатокутника з відповідними вершинами п'ятикутної зірки, що пояснює його "зоряний" вигляд та високу симетрію, хоча він і не є простою зіркою, а складнішою структурою.

Побудувати граф Петерсона (Рис.2).

На аркуші містяться формули для побудови діаграми. Зовнішній вигляд діаграми , її розташування,інформація про початкові значення параметрів повинні відповідати зразку. Значення зовнішніх і внутрішніх радіусів вводяться в комірки В5 і В6 відповідно.

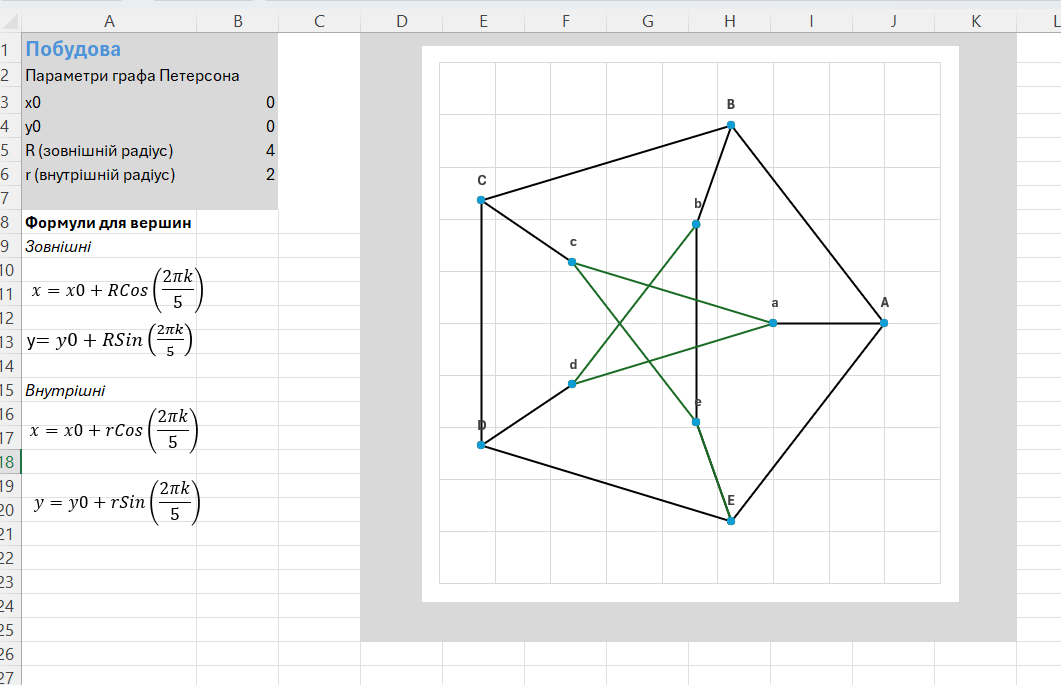


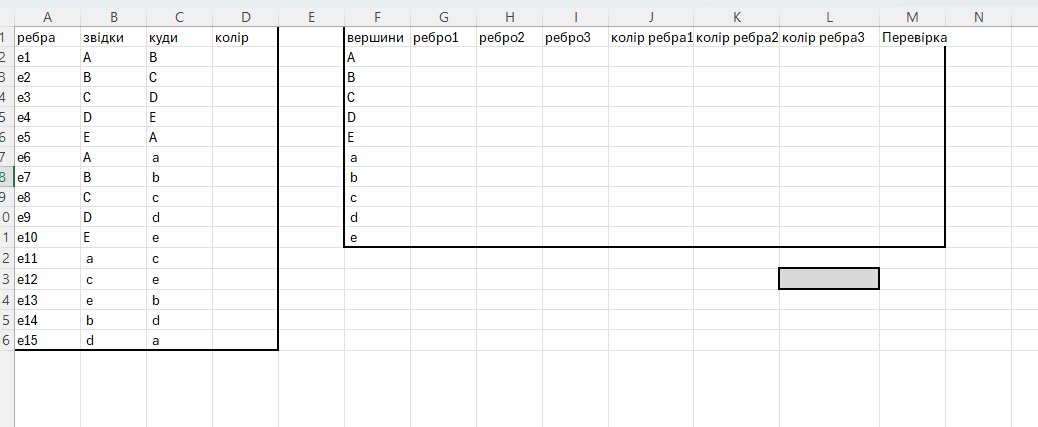
Рис.2

### Аркуш «петерсон розфарбування»

Завдання «розфарбування ребер графа Петерсона» полягає у **присвоєнні кольору кожному ребру графа так, щоб будь-які два ребра, що мають спільну вершину (тобто є суміжними), мали різні кольори, і при цьому використовувалася мінімально можлива кількість кольорів**, яка для графа Петерсона становить 3, що визначається його хроматичним індексом 3, оскільки він є 3-регулярним графом.

На аркуші надано таблицю ребер і таблицю вершин отриманого графа Петерсона. (Рис.3).

Рис. 3



В таблиці ребер зафіксуємо кольори ребер вершини А. Нехай 1 – зелений, 2 – червоний, 3- жовтий. Інші кольори будемо перебирати. Кольори ребер задаються перебором чи введенням значень.

Кількість варіантів при фіксованих кольорах однієї вершини 312= 531 441. Excel впорається, але це займе багато часу. Обмежемося введенням номерів кольорів.  
Електронна таблиця в роботі буде використовуватися лише для формальної перевірки умови розфарбування в кожній вершині.  
Таким чином, Excel не підбирає розфарбування, а лише фіксує неможливість виконання умов.

Заповніть відповідні комірки формулами, значення кольорів (1-3) вносіть в комірки стовпчика «колір», застосуйте умовне форматування для кольорів.

Результат має виглядати наступним чином (Рис.4).

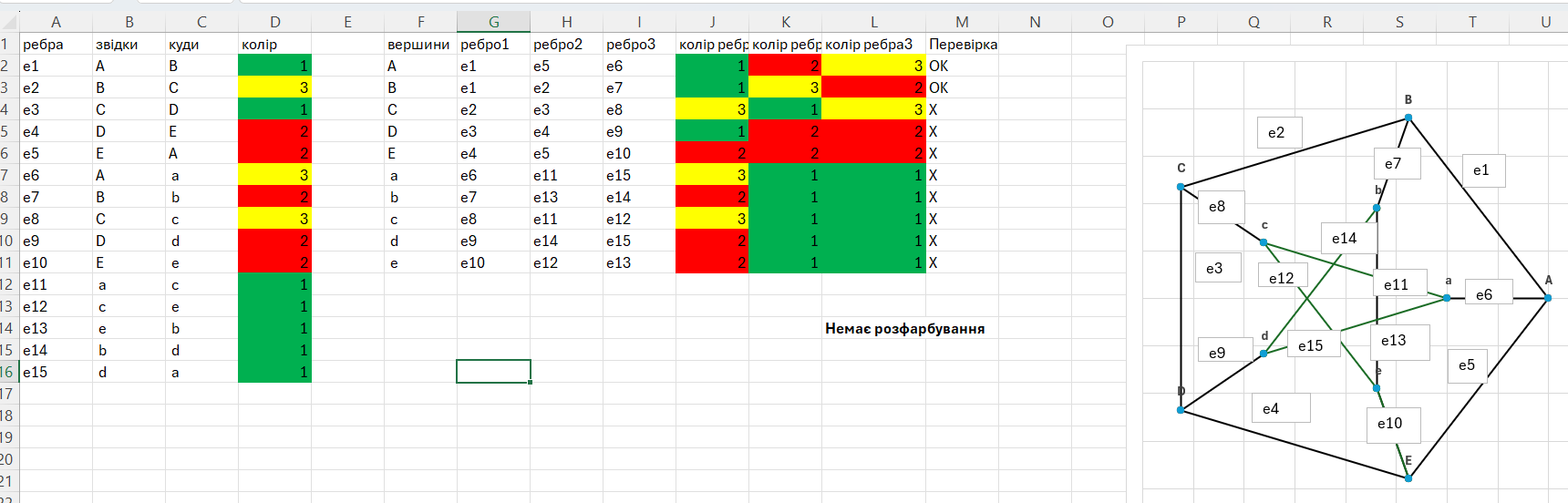


Рис.4

В комірках діапазону G2:M11 містяться формули. Формули стовпця М порівнюють кольори ребер в відповідній вершині і повертають «ОК», якщо вони різні, чи «Х» в іншому випадку. Формули діапазону G2:L11 вибирають потрібні значення з таблиці ребер.

В комірці L13 підраховується кількість «ОК» і повертається повідомлення про неможливість розфарбування, якщо кількість не дорівнює кількості ребер. Малюнок з ребрами не є обов’язковим.

Відомо з теорії графів, що Петерсон не розмальовується, ми підтверджуємо це розрахунком в Excel.

### Аркуш «петерсон мости»

**Міст** — це ребро, видалення якого **збільшує кількість компонент зв’язності** графа.

Тобто: якщо прибрати ребро → граф розпадається на частини → це міст.

**Якщо після видалення ребра жодна вершина не “обірвалась”, це не міст.**

На аркуші розташовано 2 таблиці «ребра» і «вершини» (Рис.5). На рисунку вже рішення.

Налашувати перемикачі. В комірці Е2 - номер активного перемикача. В стовпчику «active» нуль буде розташовуватися в відповідній комірці для видаленого ребра.

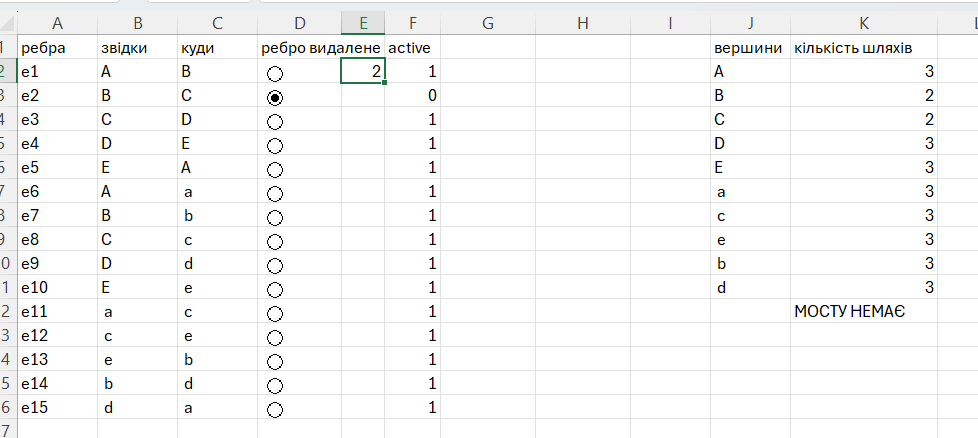


Рис.5

В стовпчику «кількість шляхів» обчислюється формулою кількість шляхів до вершин видаленого ребра. Комірка К12 містить формулу, що аналізує, чи при видалені ребра ми маємо вершину без шляху до неї (мінімальна кількість шляхів<1). В цьому випадку видалене ребро є мостом.

У графі Петерсона після видалення будь-якого ребра завжди існує альтернативний шлях, тому зв’язність не порушується і будь-яке ребро не є мостом.

### Аркуш «Дюрер».

Альбрехт Дюрер, великий художник епохи Відродження, створив **перші друковані карти зоряного неба** (північної та південної півкуль) у 1515 році, співпрацюючи з астрономами Стабієм та Хейнфогелем, де він виступив як художник, що зобразив сузір'я та міфологічних діячів, роблячи їх візуально привабливими та стандартизуючи небесну картографію на століття.

**Граф Дюрера** — це кубічний граф з 12 вершинами та 18 ребрами, названий на честь німецького художника Відродження **Альбрехта Дюрера**, оскільки його скелет описує багатогранник з гравюри Дюрера «Меланхолія» (1514)

Побудувати граф Дюрера. (Рис.6).

На аркуші містяться формули для побудови діаграми. Зовнішній вигляд діаграми, її розташування,інформація про початкові значення параметрів повинні відповідати зразку. Значення зовнішніх і внутрішніх радіусів вводяться в комірки В3 і В4 відповідно.

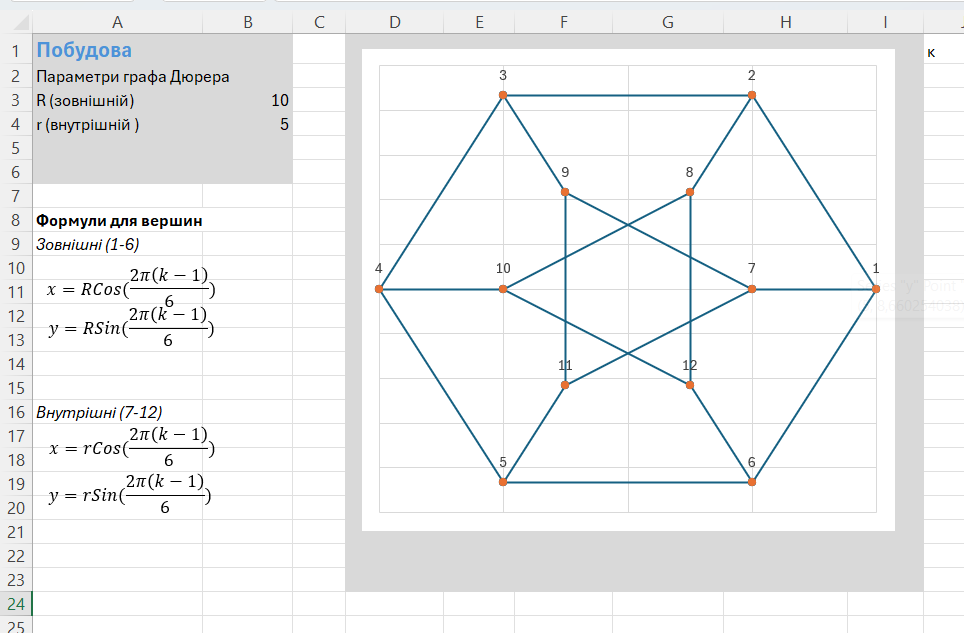


Рис.6

### Аркуш «дюрер розфарбування»

Розфарбування і аналіз кольорів ребер відбувається аналогічно графу Петерсона .

Результат має виглядати наступним чином (Рис.7). Малюнок з ребрами не є обов’язковим.

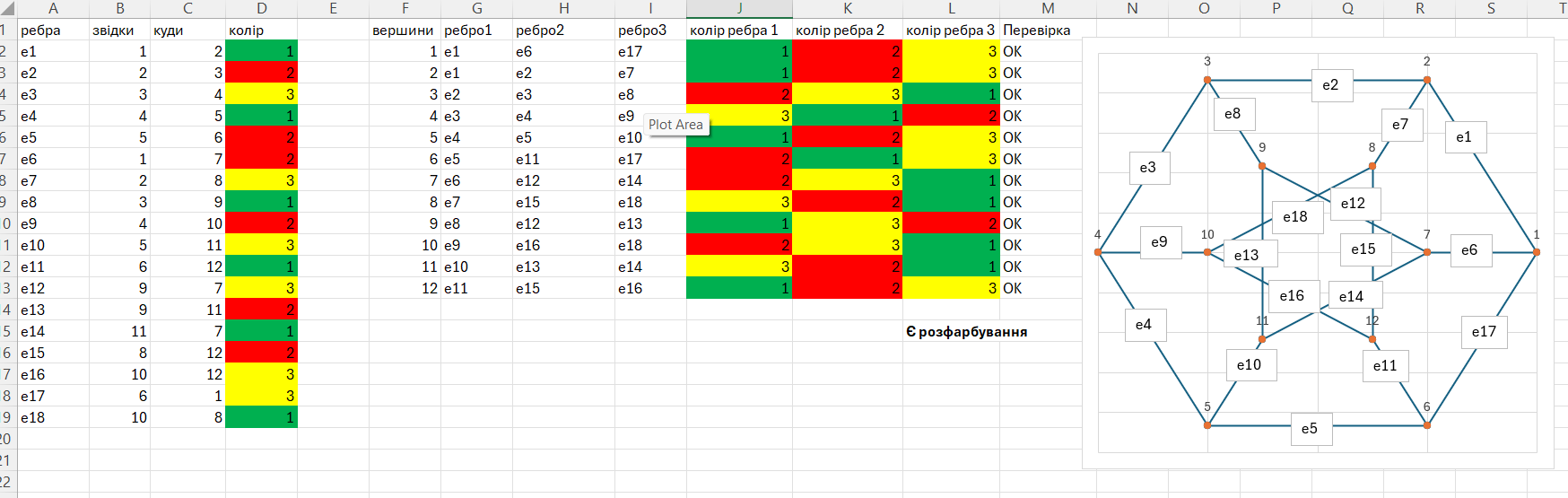


Рис. 7

На малюнку показано можливість розфарбування разними кольорами ребер графа. Але при зміні значень в стовпчику «колір» повинні відбуватися зміни і в підсумку.

Відомо з теорії графів, що Дюрер розмальовується, ми підтверджуємо це розрахунком в Excel.

### Аркуш «Петерсон vs Дюрер».

Графи мають багато властивостей, які описують їхню структуру, зв’язність, симетрію та можливі обходи. Деякі з них легко перевіряються алгоритмічно, інші — теоретично.

На аркуші розташовано підсумкову таблицю з деякими властивостями графів. Заповніть порожні клітинки.

***Вражаючий світ графів*** *відкриває дивовижну сторону математики, у якій прості об’єкти — вершини та ребра — породжують глибокі й несподівані властивості. Графи дозволяють моделювати складні структури, знаходити приховані зв’язки та досліджувати межі можливого.*

# Бажаємо гарних розв’язків!

**Довідка**

*Теорія графів має точну дату народження і конкретного "батька". Вона народилася* ***у 1736 році*** *завдяки швейцарському математику* ***Леонарду Ейлеру****, який розв'язав, здавалося б, просту дитячу головоломку.*

*Ось історія того, як це сталося:*

***1. Головоломка міста Кенігсберг***

*У XVIII столітті в прусському місті Кенігсберг (нині Калінінград) річка Прегель ділила місто на чотири частини: два береги та два острови посередині. Ці частини суходолу були з'єднані* ***сімома мостами****.*

*Жителі міста любили гуляти цими мостами, і з часом виникло популярне питання-виклик:*

*"Чи можна здійснити прогулянку містом так, щоб пройти по кожному з 7 мостів рівно один раз і повернутися назад?"*

*Багато хто намагався це зробити практично, але нікому не вдавалося. Це вважали неможливим, проте ніхто не міг пояснити — чому саме.*

***2. Геніальна абстракція Ейлера***

*Леонард Ейлер, який тоді працював у Петербурзькій академії наук, зацікавився цим завданням. Він зрозумів, що це не задача з геометрії у звичному сенсі: тут не важливі довжина мостів, їхня ширина чи точна форма островів.*

*Важливим був лише* ***порядок з'єднання****.*

*Ейлер зробив революційний крок — він спростив карту міста до схеми:*

* *Кожну частину суші (береги та острови) він позначив* ***точкою*** *(зараз ми називаємо це вершиною).*
* *Кожен міст він позначив* ***лінією****, що з'єднує ці точки (зараз це ребро).*

*Саме цей малюнок вважається* ***першим графом в історії математики****.*

***3. Логічне рішення***

*Ейлер сформулював просте правило. Якщо ви заходите на якусь частину суші по одному мосту, ви мусите вийти з неї по іншому. Тобто мости "працюють" парами.*

* *Якщо точка є проміжною (не старт і не фініш), до неї має вести* ***парна*** *кількість ліній (увійшов-вийшов).*
* *Якщо точка має* ***непарну*** *кількість ліній, вона мусить бути або початком, або кінцем маршруту.*

*Ейлер підрахував мости для кожної ділянки суші Кенігсберга:*

1. *Північний берег: 3 мости (непарне).*
2. *Південний берег: 3 мости (непарне).*
3. *Великий острів: 5 мостів (непарне).*
4. *Малий острів: 3 мости (непарне).*

***Висновок:*** *Оскільки всі 4 вершини мали непарну кількість "входів-виходів", пройти маршрут без повторень було математично неможливо. Для існування такого шляху граф повинен мати не більше двох "непарних" вершин (старт і фініш).*

***Чому це важливо сьогодні?***

*Ейлер назвав це «геометрією положення». З цієї простої задачі виросла не лише теорія графів, а й топологія. Сьогодні принципи, відкриті Ейлером, використовуються для:*

* *Побудови маршрутів у* ***GPS-навігаторах****.*
* *Проектування мікросхем у вашому комп'ютері.*
* *Аналізу соціальних мереж (хто з ким дружить).*
* *Логістики доставки товарів.*